数理解析研究所講究録 第2127巻 2019年 1-6

前射影的多元環の煉瓦とコクセター群の結び既約な元

名古屋大学多元数理科学研究科　　淺井　聡太
Sota Asai
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

本稿は 2018 年度 RIMS 共同研究（公開型）「組合せ論的表現論の諸相」において、私が行った講演「前射影的多元環の煉瓦とコクセター群の結び既約な元」の内容をまとめたものである。

本稿では K を体とする。Δ を Dynkin 図形とし、頂点集合を Δ_0 で表す。また n を Δ の頂点の個数とする。Δ に付随する Coxeter 群を W で表し、標準的生成元 $(s_i)_{i\in\Delta_0}$ に関する右弱順序 $\leq$ を入れることで、W を半順序集合とみなす。このとき W は有限束 (finite lattice) となることが知られている [3]。

なお本稿では $\Delta=\mathbb{A}_n$ のときを中心に扱う。原論文 [2] には $\Delta=\mathbb{D}_n$ の場合の結果も含まれているので、合わせてご覧いただきたい。

まず前射影的多元環の定義を述べる。

定義 1　Δ に付随する前射影的多元環 (preprojective algebra) Π を、次の手順で定める。

- Q を Δ 型の二重箙とする。つまり Q の頂点集合 Q_0 は Δ_0 に一致し、Q の矢印集合 Q_1 は $\{(i\to j),(j\to i)\mid i—j$ は Δ の辺 $\}$ である。
- 部分集合 $Q_1'\subset Q_1$ で、$(\alpha\colon i\to j)\in Q_1'$ が $(\alpha^*\colon j\to i)\notin Q_1'$ と同値となるようなものをとる。
- Π を道多元環 KQ の商として、

$$\Pi := KQ/\left\langle \sum_{\alpha\in Q_1'}(\alpha\alpha^*-\alpha^*\alpha)\right\rangle$$

  と定める。

上記の Π は有限次元 K 多元環であり、さらに自己入射的であることが知られている。

例 2　$\Delta=\mathbb{A}_n$ とする。このとき Π は、

$$1 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_3}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{\beta_4}{\overset{\alpha_3}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\beta_n}{\overset{\alpha_{n-1}}{\rightleftarrows}} n\ ;$$

$$\alpha_1\beta_2=0,\quad \alpha_i\beta_{i+1}=\beta_i\alpha_{i-1}\ (2\leq i\leq n-1),\quad \beta_n\alpha_{n-1}=0$$

という箙と関係式で定まる。$e_l\in\Pi$ を頂点 $l\in\Delta_0$ に対する冪等元とするとき、直既約射影

的左 Π 加群 Πe_l は、

$$\begin{tikzcd}
l \arrow[r] \arrow[d] & l-1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 1 \arrow[d] \\
l+1 \arrow[r] \arrow[d] & l \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 2 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
n \arrow[r] & n-1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-l+1
\end{tikzcd} . \qquad (*)$$

の形で表される。

以下 $\mathsf{mod}\,\Pi$ で有限次元左 Π 加群全体の圏を表し、各 $M \in \mathsf{mod}\,\Pi$ に対し、その非同型な直和因子の総数を $|M|$ と記す。Π 加群の中でも、今回は次のものに着目する。

定義 3　$S \in \mathsf{mod}\,\Pi$ とする。

(1)　S が**煉瓦 (brick)** であるとは、自己準同型環 $\mathsf{End}_\Pi(S)$ が K 上の斜体であることとする。$\mathsf{brick}\,\Pi$ で $\mathsf{mod}\,\Pi$ の煉瓦全体を表す。

(2)　S が**半煉瓦 (semibrick)** であるとは、$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_m$ と直既約分解したとき、各 S_i が煉瓦であり、かつ $\mathsf{Hom}_A(S_i, S_j) = 0$ $(i \neq j)$ を満たすことと定める。$\mathsf{sbrick}\,\Pi$ で $\mathsf{mod}\,\Pi$ の半煉瓦全体を表す。

特に $0 \in \mathsf{mod}\,\Pi$ は煉瓦ではないが半煉瓦である。

一方 $\mathsf{mod}\,\Pi$ の部分圏として、次のものを扱う。

定義 4　$\mathcal{F}$ を $\mathsf{mod}\,\Pi$ の充満部分圏とする。このとき $\mathcal{F}$ が**ねじれ自由類 (torsion-free class)** であるとは、$\mathcal{F}$ が部分加群と拡大をとる操作について閉じていることと定義する。$\mathsf{mod}\,\Pi$ のねじれ自由類全体を $\mathsf{torf}\,\Pi$ と書く。

$\mathsf{torf}\,\Pi$ を包含関係により半順序集合と見ると、これは束であることが知られている。

一般の多元環では煉瓦やねじれ自由類を調べるのは必ずしも容易ではないが、Dynkin 型前射影的多元環については、Coxeter 群と結びつけて考えることが可能である。そのために次のイデアルを用意する。

定義 5　[4, 6, 7] 次のように Π のイデアル I_i および $I(w)$ を定義する。

(1)　各 $i \in \Delta_0$ に対し、$I_i := \Pi(1 - e_i)\Pi$ とおく。これは Π の極大イデアルである。

(2)　各 $w \in W$ に対し、最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ を一つとり、$I(w) := I_{i_1} \cdots I_{i_l}$ とおく。これは w の最短表示のとりかたに依存しない。

この $I(w)$ を用い、水野は次の全単射を得た。ここで $\mathsf{Sub}\,M$ はある $M^{\oplus s}$ $(s \geq 0)$ への単

射を持つ加群全体からなる $\mathsf{mod}\,\Pi$ の部分圏とし、$\Pi(w) := \Pi/I(w)$ とおく。

命題 6 [7, Theorem 2.30] (cf. [1, Theorem 2.7]) 束 $(W, \leq)$ と $(\mathsf{torf}\,\Pi, \subset)$ の間には、$w \mapsto \mathsf{Sub}\,\Pi(w)$ で定まる同型が存在する。特に $\mathsf{torf}\,\Pi$ は有限集合である。

イデアル $I(w)$ は半煉瓦を調べることにも利用できる。ここで $w \in W$ の降下 (descent) 全体の集合を $\mathsf{des}(w) \subset \Delta_0$ と記し、W の結び既約 (join-irreducible) な元全体を $\mathsf{j\text{-}irr}\,W$ と定める。W は有限束であるから、$\#\,\mathsf{des}(w) = 1$ と $w \in \mathsf{j\text{-}irr}\,W$ とは同値である。

命題 7 [2, Propositions 1.5, 2.2] 各 $w \in W$ に対し、$S(w) := \mathsf{soc}_{\mathsf{End}_\Pi(\Pi(w))}\,\Pi(w)$ とおく。

(1) 全単射 $S(?) \colon W \to \mathsf{sbrick}\,\Pi$ が得られる。
(2) $S(w) \in \mathsf{brick}\,\Pi$ は $w \in \mathsf{j\text{-}irr}\,W$ であることと同値である。
(3) $\mathsf{Sub}\,\Pi(w)$ は $S(w)$ を含む最小のねじれ自由類である。

以下では $S(w)$ を具体的に書き表すことを目標とする。そのためには次の組合せ論的概念が重要である。

定義 8 [8] L を有限束、x を L の元、U を L の部分集合とする。このとき U が x の**標準結び表現 (canonical join representation)** であるとは、次の 3 条件が満たされることとする。

(a) U の元全体の結び $\bigvee_{u \in U} u$ は x に一致する。
(b) 任意の真部分集合 $U' \subsetneq U$ に対し、$\bigvee_{u' \in U'} u'$ は x と異なる。
(c) $V \subset L$ も条件 (a), (b) を満たすとする。このとき、任意の $u \in U$ に対し、ある $v \in V$ が、$u \leq v$ を満たす。

各 $x \in L$ の標準結び表現 U は、存在すれば一意であり、このとき $U \subset \mathsf{j\text{-}irr}\,L$ となる。一方 L が有限束であっても、各 $x \in L$ が標準結び表現をもつとは限らない。

私は、$\mathsf{torf}\,\Pi$ を経由することで、束 W の任意の元 w が標準結び表現をもち、それは半煉瓦 $S(w)$ の直既約分解に対応することを証明した。

定理 9 [2, Corollary 2.3] 任意の $w \in W$ と $w_1, \ldots, w_m \in \mathsf{j\text{-}irr}\,W$ に対し、$S(w) = S_1 \oplus \cdots \oplus S_m$ であることは、$\{w_1, \ldots, w_m\}$ が w の標準結び表現であるための必要十分条件である。

これに基づき以下の方針で $S(w)$ を決定する。

(a) 各 $w \in W$ の標準結び表現を求める。
(b) 各 $w \in \mathsf{j\text{-}irr}\,W$ に対し $S(w)$ の具体的表示を与える。

まずステップ (a) を実行するため、有限 Coxeter 群における次の性質を引用する。

命題 10　[8, Theorem 10-3.9] $w \in W$ とする。

(1)　各 $d \in \mathsf{des}(w)$ に対し $t_d := ws_dw^{-1}$ と定義する。このとき $\{v \in W \mid v \leq w,\ l(t_dv) < l(v)\}$ という集合には、最小元 w_d が存在する。
(2)　$\{w_d \mid d \in \mathsf{des}(w)\}$ は w の標準結び表現である。

よく知られているように、$\Delta = \mathbb{A}_n$ のとき、$s_i \in W$ を互換 $(i \quad i+1)$ に写すことで、W は対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ と同一視できる。各 $w \in W$ に対し、次のことが成立する。

- $\mathsf{des}(w) = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid w(i) > w(i+1)\}$ である。
- $w \in \mathsf{j\text{-}irr}\, W$ は、$w(l) > w(l+1)$ となる $l \in \{1,\dots,n\}$ がただ一つ存在することと同値である。このとき w を l 型の結び既約な元といい、$R(w)$ を $\{w(l+1),\dots,w(n+1)\}$ と定める。

このとき w の標準結び表現に表れる元 w_d は次のように特定できる。

命題 11　[8, Theorem 10-5.6] (cf. [2, Proposition 4.4]) $\Delta := \mathbb{A}_n$ とする。各 $w \in W$ と $d \in \mathsf{des}(w)$ に対し、$a_d := w(d)$, $b_d := w(d+1)$ と定めると、

$$R(w_d) = \{i \in \{b_d, b_d+1, \dots, a_d-1\} \mid w^{-1}(i) \geq d+1\} \cup [a_d+1, n+1]$$

である。

次は上記の適用例である。

例 12　$\Delta := \mathbb{A}_n$ とし、$w := (4,9,3,6,2,8,5,1,7) \in W$ とする。このとき $\mathsf{des}(w) = \{2,4,6,7\}$ であり、

$$w_2 = (1,2,4,9,3,5,6,7,8), \qquad w_4 = (1,3,4,6,2,5,7,8,9),$$
$$w_6 = (1,2,3,4,6,8,5,7,9), \qquad w_7 = (2,3,4,5,1,6,7,8,9)$$

が w の標準結び表現を与える。

ここまででステップ (a) は完了した。ステップ (b) のためには、次の命題が鍵となる。

命題 13　[5, Theorems 4.1, 4.5] $w \in \mathsf{j\text{-}irr}\, W$ を l 型の結び既約な元とし、$J(w) := \Pi(w)e_l$ とおく。このとき $J(w)$ は $\Pi(w)$ の直既約因子であり、$\mathsf{Sub}\, J(w) = \mathsf{Sub}\, \Pi(w)$ を満たす。

このとき $S(w) = \mathsf{soc}_{\mathsf{End}_{\Pi}(J(w))} J(w)$ も成立する。$J(w)$ は $\mathbb{A}_n$ 型の場合は、射影的加群の図 $(*)$ を、次のように「削る」ことで得られる。

命題 14　[5, Theorem 6.1] $\Delta := \mathbb{A}_n$ とし、$w \in \mathsf{j\text{-}irr}\, W$ を l 型の結び既約な元とする。このとき $J(w)$ は次の手順で得られる。

- 例 2 において Πe_l を表す図 $(*)$ を考える。
- 各 $j \in \{l, l+1, \ldots, n\}$ に対し、j から始まる列は $j \to j-1 \to \cdots j-l+1$ である。
- 上の列の中で $w(j+1)$ 以上の部分を残し、他を削除する。

これをもとに、私は $\mathbb{A}_n$ 型の場合に $S(w)$ の具体形を求めた。

定理 15 [2, Theorem 3.1, Corollary 3.3] $\Delta := \mathbb{A}_n$ とし、$w \in \text{j-irr}\, W$ を l 型の結び既約な元とする。このとき $S(w)$ は次の手順で得られる。

- $a := w(l)$, $b := w(l+1)$, $V = \{b, b+1, \ldots, a-1\}$ とおく。
- $S(w)$ は K ベクトル空間として基底 $(\langle i \rangle)_{i \in V}$ をもつ。
- 各 $i \in V$ に対し、1 次元空間 $K\langle i \rangle \subset S(w)$ を表す記号として、i を書く。
- 各 $i \in V \setminus \{a-1\}$ に対し、記号 i と $i+1$ の間に、$i+1 \in R(w)$ なら矢印 $i \to i+1$ を、そうでなければ矢印 $i \leftarrow i+1$ を書く。

具体的には例えば次のようになる。

例 16 例 12 のとき、半煉瓦 $S(w)$ は $S(w_2) \oplus S(w_4) \oplus S(w_6) \oplus S(w_7)$ と直既約分解される。ここで、

$$\begin{aligned}
S(w_2) &= S(1,2,4,9,3,5,6,7,8) = && \phantom{1 \leftarrow 2 \leftarrow{}} 3 \leftarrow 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8, \\
S(w_4) &= S(1,3,4,6,2,5,7,8,9) = && \phantom{1 \leftarrow{}} 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \to 5 \phantom{{}\to 6 \to 7 \to 8}, \\
S(w_6) &= S(1,2,3,4,6,8,5,7,9) = && \phantom{1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \to{}} 5 \leftarrow 6 \to 7 \phantom{{}\to 8}, \\
S(w_7) &= S(2,3,4,5,1,6,7,8,9) = && 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4
\end{aligned}$$

である。

参考文献

[1] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math. **150**, no. 3 (2014), 415–452.

[2] S. Asai, *Bricks over preprojective algebras and join-irreducible elements in Coxeter groups*, arXiv:1712.08311v2.

[3] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 231, Springer, New York, 2005.

[4] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi–Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. **145**, no. 4 (2009), 1035–1079.

[5] O. Iyama, N. Reading, I. Reiten, H. Thomas, *Lattice structure of Weyl groups via representation theory of preprojective algebras*, Compos. Math. **154**, no. 6 (2018),

1269–1305.

[6] O. Iyama, I. Reiten, *Fomin–Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi–Yau algebras*, Amer. J. Math. **130**, no. 4 (2008), 1089–1149.

[7] Y. Mizuno, *Classifying τ-tilting modules over preprojective algebras of Dynkin type*, Math. Z. **277**, no. 3–4 (2014), 665–690.

[8] N. Reading, *Lattice theory of the poset of regions*, Lattice theory: special topics and applications, Vol. 2, 399–487, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.